Лекція № 10А

Канонічні перетворення.

> …коли вам доводиться мати справу з деяким об'єктом, наділеним структурою, спробуйте визначити перетворення, що залишають без зміни всі структурні співвідношення
>
> Г.Вейль

Перш ніж переходити до канонічних перетворень, розглянемо перетворення рівнянь Лагранжа під час перетворення координат. Проаналізуємо це питання у нашому випадку.

Розглянемо лагранжеву систему з s ступенями вільності, тобто. систему, s координат якої задовольняють рівнянням Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(q_i,\dot{q}_i\right)}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\,. \tag{22.1}$$

Перейдемо від цих «старих» s координат q_i до «нових» s координат Q_i які пов'язані зі старими співвідношеннями

$$q_i=F_i\left(Q_1,Q_2,...,Q_s\right),\ s=1,2,...,s\,. \tag{22.2}$$

(Таке перетворення називається *точковим перетворенням)* . Крім зв'язків $q_i=F_i\left(Q\right)$ маємо s співвідношень $\dot{q}_i=\left(\partial F_i/\partial Q_k\right)\dot{Q}_k$, що випливають з них. При цьому перехід до нового Лагранжіана описується співвідношенням

$$L\left(q_i,\dot{q}_i\right)=L\Big(F_i\left(Q_k\right);\left(\partial F_i/\partial Q_k\right)\dot{Q}_k\Big)=\overline{L}\left(Q_i,\dot{Q}_i\right). \tag{22.3}$$

Якому рівнянню задовольняє нова функція $\overline{L}\left(Q,\dot{Q}\right)$? Знайдемо похідні від $\overline{L}$ з Q і $\dot{Q}$. З (22.3) витікає

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial Q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial F_k}{\partial Q_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial^2 F_k}{\partial Q_n\partial Q_i}\dot{Q}_n\,, \tag{22.4}$$

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial F_k}{\partial Q_i}\,. \tag{22.5}$$

Диференціюючи співвідношення (22.5) за часом, отримуємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\frac{\partial F_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial^2 F_k}{\partial Q_n \partial Q_i}\dot{Q}_n, \tag{22.6}$$

і підставляючи останній доданок в (22.6) його вираз з (22.4), маємо остаточно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial Q_i} = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\frac{\partial F_k}{\partial Q_i}. \tag{22.7}$$

Оскільки рівняння Лагранжа у правій частині задовольняється у старих координатах, воно виконується й у нових координатах (ліва частина рівності). Оскільки лагранжева система є водночас і гамільтоновою, можна сказати, що при точковому перетворенні гамільтонова (канонічна) система залишається гамільтоновою (канонічною). Тому перетворення змінних, що зберігають гамільтоновість системи, називаються ***канонічними перетвореннями.*** Ми показали, що точкові перетворення (перетворення лише координат) є канонічними.

Важливість перетворення координат у тому, що у нових координатах можна сподіватися спростити рівняння руху та полегшити їх вирішення. У гамільтоновому підході виникає подвоєна кількість незалежних змінних: координат та імпульсів. Тому виникає можливість маніпулювання набагато більшою кількістю змінних, сподіваючись спростити завдання. Можливість розширення безлічі перетворень є однією з переваг гамільтонова підходу в механіці.

Розглянемо більш загальні, ніж точкові, перетворення як узагальнених координат, а й узагальнених імпульсів:

$$Q_i = Q_i(q,p,t),\ P_i = P_i(q,p,t). \tag{22.8}$$

Виникає питання: якщо вихідна система канонічно пов'язаних узагальнених координат q і імпульсів p є гамільтоновою, то чи такі перетворення у випадку канонічних, призводять до рівнянь Гамільтона і в нових змінних? Відповідь негативна: у випадку довільних зв'язкіх типу (22.8) – ні. Мається на увазі, що ми звернемо зв'язки (22.8), висловимо їх у вигляді $q_i = q_i(Q,P,t)$ і $p_i = p_i(Q,P,t)$, підставимо ці величини в «старий» гамільтоніан $H(p,q,t) = H(p(P,Q,t),q(P,Q.t),t) = \overline{H}(P,Q,t)$ і перевіримо, чи виконуються нові рівняння Гамільтона вигляду $\dot{Q} = \partial\overline{H}/\partial P$ і

$\dot{P} = -\partial\bar{H} / \partial Q$? У загальному випадку заміни змінних вони не будуть задовольнятися. Справді, обчислимо, наприклад, повну похідну $\dot{Q} = dQ / dt$ від старих змінних.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial Q}{\partial t}. \qquad (22.9)$$

Оскільки вихідна система передбачалася гамільтоновою, то ця величина дорівнює

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \left\{H(p,q), Q(p,q)\right\}\Big|_{p,q}. \qquad (22.10)$$

Т.я. у цьому питанні у нас фігурують старі та нові координати, то у виразі (22.10) зазначено, що у дужках Пуассона диференціювання проводиться за старими змінними (p,q). З іншого боку, якщо в нових змінних система також є гамільтоновою з виконанням рівнянь $\dot{Q} = \partial\bar{H} / \partial P$ і $\dot{P} = -\partial\bar{H} / \partial Q$, то повна похідна за часом від функції Q може бути представлена у вигляді (див. лекцію №20):

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \left\{\bar{H}(P,Q), Q\right\}\Big|_{P,Q}, \qquad (22.11)$$

де дужки Пуассона обчислюються за новими змінними (P,Q). У загальному випадку праві частини (22.10) і (22.11) не збігаються, але видно, що канонічність перетворення пов'язана з властивостями дужок Пуассона.

Можна порушити питання інакше. Чи можна при довільній заміні (22.8) знайти «новий» гамільтоніан $H'(Q,P) \neq \bar{H}(Q,P)$, для якого б виконувались рівняння Гамільтона

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P},\ \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}. \qquad (22.12)$$

У загальному випадку відповідь знову негативна: якщо старі координати та імпульси задовольняли рівняння Гамільтона, то при довільному їх перетворенні не існує жодної нової функції Гамільтона, яка б задовольняла новим канонічним рівнянням з новими змінними.

Тому питання можна поставити інакше.

1) Як «будувати» такі перетворення координат та імпульсів, при переході з якими нова система свідомо буде гамільтоновою? (Але при цьому ми можемо отримати складніші для вирішення або фізично не цікаві системи рівнянь).

2) Як можна перевірити, чи є запропонована нами заміна змінних канонічної, і чи варто намагатися шукати новий гамільтоніан для нових змінних?

Розглянемо перше завдання. Як було показано в лекції №7 (див.(19.17)), рівняння Гамільтона можуть бути отримані при варіюванні дії $\delta S = 0$, а в лекції №9 було показано, що дія в підході Гамільтона може бути представлена у вигляді $S = \int\left(\sum p_i dq_i - Hdt\right)$. Тому гамільтоновість вихідної системи випливає з рівняння

$$\delta\int\left(\sum p_i dq_i - H\left(p,q\right)dt\right) = 0. \tag{22.13}$$

Якщо після перетворення координат та імпульсів (22.8) нові змінні $\left(P,Q\right)$ задовольняють рівнянням Гамільтона (22.12) з новим гамільтоніаном H', то з (22.13) повинно аитякати виконання рівняння

$$\delta(\sum P_i dQ_i - H'(P,Q)dt) = 0. \tag{22.14}$$

Два принципи (22.13) і (22.14) еквівалентні (тобто з (22.13) випливають (22.14)) тільки в тому випадку, якщо вирази під інтегралами в них відрізняються на повний диференціал від довільної функції dF. При цьому величина $\int_{t_1}^{t_2} dF = F\left(t_2\right) - F\left(t_1\right)$ є числом, яке не дає вкладу при варіюванні, тобто. $\delta\int_{t_1}^{t_2} dF = \delta F\left(t_1\right) - \delta F\left(t_2\right) = 0$. Отже:

$$\sum p_i dq_i - H\left(p,q\right)dt - \sum P_i dQ_i + H'\left(P,Q\right)dt = dF . \tag{22.15}$$

Оскільки у лівій частині стоять диференціали dq_i, dQ_i і dt, то функція F залежить від таких змінних: $F = F\left(q_i, Q_i, t\right)$. Ця функція називається ***твірною функцією*** даного переходу від однієї гамільтонової системи до нової гамільтонової системи, тобто вона здійснює канонічне перетворення. В даному випадку твірна функція залежить тільки від нових і старих координат (і часу). Вибираючи різні твірні функції $F\left(q,Q.t\right)$, ми отримуватимемо різні нові канонічні системи (тобто нові представлення вихідної системи). Якщо нова система виявиться простіше від вихідної, то після розв'язання задачі в ній можна повернутися до вихідних змінних у розв’язку. Але для цього треба знати зв'язок нових і старих змінних, що випливає з виду твірної функції. Перепишемо (22.1 5) у вигляді

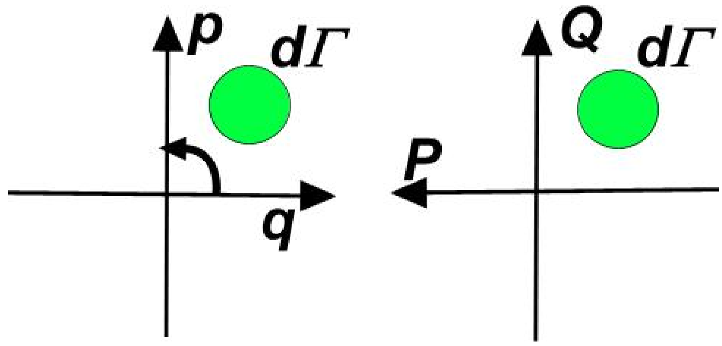
$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + \left(H' - H\right) dt \,. \tag{22.16}$$

Звідси видно, що

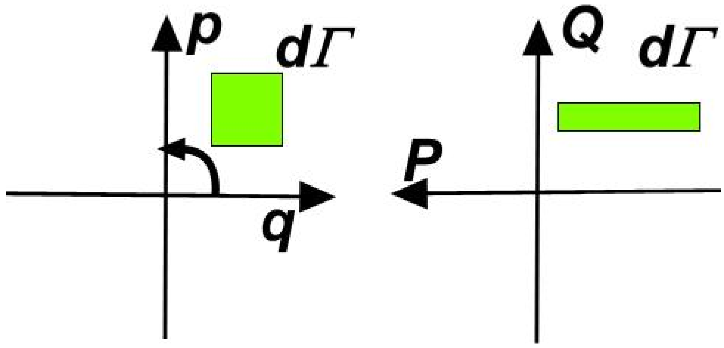
$$p_i = \frac{\partial F\left(q,Q,t\right)}{\partial q_i},\ P_i = -\frac{\partial F\left(q,Q,t\right)}{\partial Q_i},\ H'\left(P,Q,t\right) = H\left(p,q,t\right) + \frac{\partial F\left(q,Q,t\right)}{\partial t}. \tag{22.17}$$

Перші $2s$ співвідношень - це алгебраїчні рівняння, що пов'язують старі і нові змінні. З перших s рівнянь ми знаходимо вирази нових координат $Q_i = Q_i\left(p,q,t\right)$ через старі координати і імпульси. Після підстановки їх у другі s рівнянь знаходимо вирази $P_i = P_i\left(p,q,t\right)$ нових імпульсів через старі координати та імпульси. Ці зв'язку можна звернути і знайти вирази старих координат та імпульсів через нові змінні: $p_i = p_i\left(P,Q,t\right)$ і $q_i = q_i\left(P,Q.t\right)$. Після їх підстановки в праву частину останнього виразу ми отримуємо новий гамільтоніан $H'\left(P,Q,t\right)$ у нових змінних.

Як найпростіший приклад такої твірної функції виберемо $F\left(q,Q\right) = qQ$. При цьому з (22.17) отримуємо зв'язки $p = Q$ та $q = -P$. Тобто, координати та імпульси обмінюються місцями, що підкреслює умовний характер поділу змінних у підході Гамільтона: можна говорити просто про два набори змінних, пов'язаних рівняннями Гамільтона, які називають *канонічно спряженими змінними.* Розглянуте канонічний перетворення зображено на Рис.22.1. З нього видно, що це канонічне перетворення зводиться до повороту осей у фазовому просторі на кут $\pi / 2$. Оскільки це просто поворот осей, площа обраної ділянки фазової площини $d\Gamma$ при цьому перетворенні не змінюється. Розглянемо ще одне перетворення з $F = \alpha qQ$. У цьому разі $p = \alpha Q$ і $q = -P / \alpha$. Це є поворот осей зі зміною масштабу: змінна p «стискається» в міру α, а змінна q з такою ж мірою «розтягується». При цьому фазовий об'єм також зберігається (див. мал.22.2).



22.1. Канонічне перетворення з функцією $F(q,Q) = qQ$.



22.2. Канонічне перетворення з твірною функцією $F(q,Q) = \alpha qQ$ при $\alpha > 1$.

Твірна функція $F(q,Q,t)$ – не єдина, що породжує канонічні перетворення. Як твірну функцію можна вибрати, наприклад, функцію старих координат q_i і нових імпульсів P_i. Зробимо перетворення Лежандра по змінним P_i та Q_i над співвідношенням (22.16):

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H)dt = \sum p_i dq_i - \sum d(P_i Q_i) + \sum Q_i dP_i + (H' - H)dt \tag{22.18}$$

або

$$d\left(F + \sum P_i Q_i\right) = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H)dt = d\Phi(q_i, P_i, t). \tag{22.19}$$

Тобто, нова твірна функція $\Phi(q_i, P_i, t)$ залежить від старих координат і нових імпульсів.

За допомогою цієї функції зв'язок старих і нових змінних визначається набором рівнянь:

$$p_i = \frac{\partial \Phi(q,P,t)}{\partial q_i},\ Q_i = \frac{\partial \Phi(q,P,t)}{\partial P_i},\ H'(P,Q,t) = H(p,q,t) + \frac{\partial \Phi(q,P,t)}{\partial t}. \tag{22.20}$$

Для найпростішого випадку такого канонічного перетворення з твірною функцією $\Phi(q,P)=\alpha qP$ співвідношення старих і нових змінних виглядає так: $p=\alpha P$ і $q=Q/\alpha$. Тобто. область фазової площини стискається в одному напрямку та розтягується в іншому із збереженням об'єму. (Складніший приклад наведено в задачі до лекції).

Крім цих двох функцій $F(q,Q,t)$ і $\Phi(q,P,t)$ з допомогою відповідних перетворень Лежандра можна побудувати також твірні функції $W_1(p,Q,t)$, $W_2(p,P,t)$ і $W(p,q,t)$. Твірні функції F, Φ, W_1 і W_2 пов'язують старі та нові змінні на відміну від функції $W(p,q,t)$. Обговоримо її докладніше. Запишемо (22.15) у вигляді

$$dW(p_i,q_i,t)=\sum p_i dq_i-\sum P_i dQ_i+(H'-H)dt\,. \tag{22.21}$$

Враховуючи, що $Q_i=Q_i(q,p,t)$, перепишемо (22.21) у вигляді

$$\begin{aligned}&\sum\frac{\partial W}{\partial q_i}dq_i+\sum\frac{\partial W}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial W}{\partial t}dt=\\&=\sum p_i dq_i-\sum P_i\frac{\partial Q_i}{\partial q_s}dq_s-\sum P_i\frac{\partial Q_i}{\partial p_s}dp_s-\sum P_i\frac{\partial Q_i}{\partial t}dt+(H'-H)dt\end{aligned}\,. \tag{22.22}$$

Прирівнюючи нулю коефіцієнти при всіх диференціалах, отримуємо

$$\sum P_n\frac{\partial Q_n}{\partial q_i}+\frac{\partial W}{\partial q_i}-p_i=0\,, \tag{22.23}$$

$$\sum P_n\frac{\partial Q_n}{\partial p_i}+\frac{\partial W}{\partial p_i}=0\,, \tag{22.24}$$

$$\sum P_n\frac{\partial Q_n}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial t}+H-H'=0\,. \tag{22.25}$$

Це перетворення складніше за попередні, оскільки замість алгебраїчних рівнянь (22.17), (22.23) для визначення зв'язку нових і старих змінних в даному випадку ці зв'язки визначаються диференціальними рівняннями (22.23), (22.24), що містять часткові похідні типу $\partial Q/\partial q$, $\partial Q/\partial p$ і $\partial Q/\partial t$. Але із цього перетворення можна отримати важливі наслідки. Після диференціювання (22.23) по p_k, а (22.24) по q_k, зміни індексів $k\leftrightarrow i$ в другому рівнянні, і вичитання рівнянь одне з одного, ми приходимо до співвідношення:

$$\sum\left(\frac{\partial P_n}{\partial p_k}\frac{\partial Q_n}{\partial q_i}-\frac{\partial P_n}{\partial q_i}\frac{\partial Q_n}{\partial p_k}\right)=\delta_{ik}\,. \tag{22.26}$$

Тут ми маємо ще одну білінійну антисиметричну диференційну операцію, у якій сумовування по повторюваним індексам міститься у чисельнику, а різні функції у знаменнику на відміну від дужок Пуассона. Видно, що вираз у лівій частині (22.26) представляє собою окремий випадок такої конструкції:

$$\left[fg\right]_{pq}=\sum\left(\frac{\partial p_i}{\partial f}\frac{\partial q_i}{\partial g}-\frac{\partial p_i}{\partial g}\frac{\partial q_i}{\partial f}\right). \tag{22.27}$$

Ця конструкція називається ***дужками Лагранжа*** **.** Порівняння цього виразу з визначенням дужок Пуассона з лекції №8:

$$\left\{fg\right\}=\sum\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) \tag{22.28}$$

показує, що дужки Лагранжа у певному сенсі «зворотні» стосовно дужок Пуассона.

Повернемося до другого питання: як можна перевірити канонічність перетворення обраної заміни змінних? Для цього треба попередньо довести **теорему про інваріантність дужок Пуассона** щодо канонічних перетворень:

Якщо перетворення змінних $(p,q)\to(P,Q)$ є канонічним, і зробити таку заміну змінних у двох функціях $f(p,q),g(p,q)\to f(P,Q),g(P,Q)$, то дужки Пуассона в нових та старих змінних збігатимуться:

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)=\sum\left(\frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i}-\frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i}\right)\quad,\ \left\{fg\right\}_{pq}=\left\{fg\right\}_{PQ}. \tag{22.29}$$

Ця теорема легко доводиться для системи з одним ступенем вільності. Для неї

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}=\left(\frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}+\frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}+\frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial Q}-\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}-\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right)$$

Якщо розглянуте канонічне перетворення вважати пов'язаним з функцією W, то з (22.26) витікає, що другий множник у правій частині дорівнює одиниці. При цьому ми приходимо до рівності (22.29).

У загальному випадку декілька ступенів вільності інваріантність дужок Пуассона щодо канонічних перетворень можна довести в такий спосіб. Насамперед , у співвідношеннях (22.17) $(p,q)\to(P,Q)$ час грає роль параметра, який не торкається в операціях диференціювання за новими та старими змінними (P,Q,p,q) у дужках Пуассона. Тому теорему досить довести для систем, які не залежать від часу явно. І тут у дужці Пуассона $\{gf\}_{p,q}$ функцію $g(p,q)$ можна формально розглядати у якосты гамільтоніана деякої певної системи. Для гамільтонової системи виконується співвідношення $df/dt=\{Hf\}$, тобто у нашому випадку $df/dt=\{gf\}$. Але df/dt в цьому виразі є повною зміною функції $f(t)$ протягом часу dt, тобто «числом», яке не може залежати від вибору тих чи інших змінних, шо і доводить співвідношення (22.29) для канонічних перетворень.

Вибираючи в (22.29) величини f і g в якості величин Q_i і P_i та користуючись властивостями *фундаментальних дужок Пуассона* (20.17)

$$\{P_i,P_k\}_{PQ}=0\,,\ \{Q_i,Q_k\}_{PQ}=0\,,\ \{P_i,Q_k\}_{PQ}=\delta_{ik}\,, \qquad (22.30)$$

отримаємо

$$\{P_i,P_k\}_{pq}=0\,,\ \{Q_i,Q_k\}_{pq}=0\,,\ \{P_i,Q_k\}_{pq}=\delta_{ik}\,. \qquad (22.31)$$

Тому, вибираючи деяку заміну старих координат і імпульсів новими , треба перевірити простим диференціюванням нових змінних за старим виконання або не виконання співвідношень (22.31), тобто. інваріантність дужок Пуассона. Якщо якісь із цих співвідношень не виконуються, то запропонована заміна змінних не є канонічною.

Завдання. До якого канонічного перетворення призводить твірна функція

$$\Phi(q,P)=\frac{1}{\cos\alpha}qP-tg\alpha\frac{q^2+P^2}{2}$$

(Після знаходження зв'язку нових і старих змінних запишіть координати і імпульси на фазовій площині в циліндричних координатах).